

NOTA	
-------------	--

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones: • **NO HAY CONSULTAS.**

- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.
- **Secciones:**

A : Prof. Wilfred Flores.**D** : Prof. Walter Chambio**B** : Prof. Cristian Mardones.**E** : Prof. Sebastián Marquez.**C** : Prof. Jorge Espinoza.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración= 60 minutos**CORRECCIÓN**

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

- 1) [**15 ptos.**] Un tronco de un árbol de forma cilíndrica crece a razón de 0,25 [cm/año] y su altura crece a razón de 1 [mts/año]. Determine la tasa de variación del volumen del tronco cuando el diámetro es de 3 [cm] y su altura es 50 [mts].
Ayuda: $Vol_{cil} = \pi r^2 h = \text{Area circunferencia} \times \text{altura}$

- 2) [30 ptos.] Graficar la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, siguiendo los siguientes pasos:
- a) [5 ptos] Determinando Dom(f).
 - b) [5 ptos] Calculando los puntos de intersección del grafico con los ejes co-ordenados.
 - c) [5 ptos] Determinando los puntos críticos.
 - d) [5 ptos] Determinando los extremos, si existen.
 - e) [5 ptos] Estudiando la concavidad y hallando los puntos de inflexión, si existen.
 - f) [5 ptos] Determinando si la curva tiene asíntotas horizontales, sabiendo que no hay asíntotas verticales.

- 3) [**15 ptos.**] Una hoja de papel debe contener $18 \text{ [cm}^2\text{]}$ de texto impreso. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 [cm] cada uno, y los laterales 1 [cm] cada uno. Hallar las dimensiones de la página para que el gasto de papel sea mínimo.

Pauta:

1) ■ Datos: $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4} \left[\frac{\text{cm}}{\text{año}} \right]$, $\frac{dh}{dt} = 100 \left[\frac{\text{cm}}{\text{año}} \right]$, $r = \frac{3}{2} [\text{cm}]$ y $h = 5000 [\text{cm}]$ [5 pts]

-
- Considerando la ecuación $V = \pi r^2 h$ y derivandola c/r a t , obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r h \cdot \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (1)$$

[5 pts]

.....

Reemplazando los datos en (1), se obtiene $\frac{dV}{dt} = 3975 \pi \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{año}} \right]$ [5 pts]

.....

2) Siguiendo el esquema para analizar funciones, se tiene:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ [5 pts]

.....

- b) ■ Eje X : Haciendo $y = 0$ obtenemos el punto $(0, 0)$
- Eje Y : Haciendo $x = 0$ obtenemos el punto $(0, 0)$ [5 pts]
-

- c) ■ $f'(x) = 0 \implies \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \implies 1-x^2 = 0 \implies x = \pm 1$
- No existen valores de $x \in \text{Dom}(f)$ tales que $f'(x)$ no este definida. [5 pts]
-

d) Consideremos la siguiente tabla

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
$f'(x)$	—	+	—
f es	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Luego:

- f es creciente en $(-1, 1)$
- f es decreciente en $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$
- f cambia de (+ a -) en $x = 1 \implies$ máximo relativo en: $(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ [2 pts]
- f cambia de (- a +) en $x = -1 \implies$ mínimo relativo en: $(-1, f(-1)) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$
- [3 pts]

e) $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \iff 2x(x^2-3) = 0 \implies x = 0; x = \pm\sqrt{3}$ [1 pto]

Consideremos la siguiente tabla

	$-\infty < x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x < +\infty$
$f''(x)$	-	+	-	+
f es	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

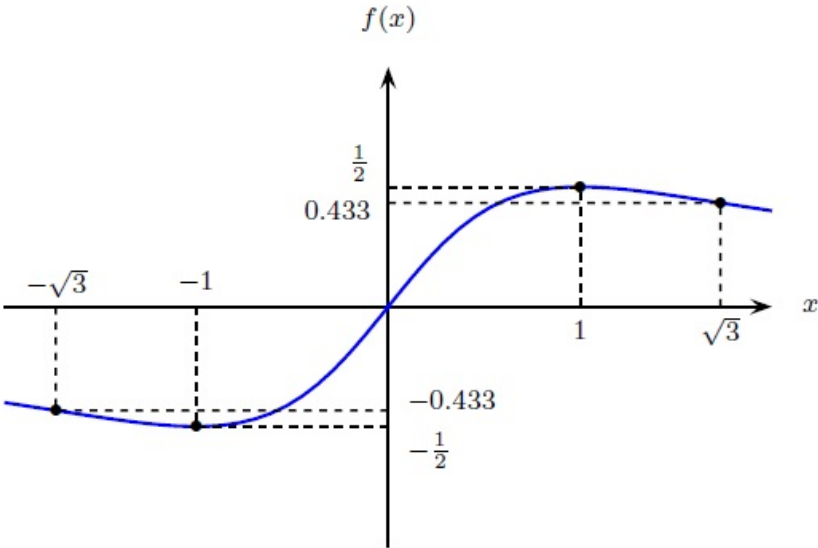
Luego:

- f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{3})$; $(0, \sqrt{3})$ [1 pto]
- f es cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{3}, 0)$; $(\sqrt{3}, +\infty)$ [1 pto]
- Los puntos $(\pm\sqrt{3}, f(\pm\sqrt{3})) = \left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y $(0, f(0)) = (0, 0)$ son puntos de inflexión. [2 pts]

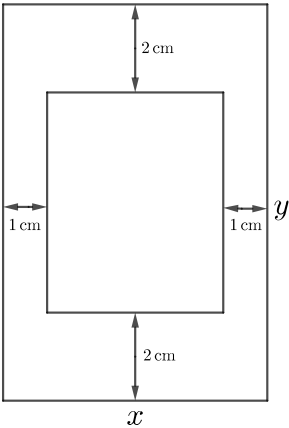
.....

f) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$. Luego la recta $y = 0$ es una asíntota vertical. [5 pts]

.....



3) Paso 1: Dibujo y asignación de variables. [2 pts]



Paso 2: Función a maximizar.

[2 pts]

$$A(x, y) = xy, \quad \text{con } x > 2, y > 4. \quad (2)$$

Paso 3: Relación entre las variables.

$$(x - 2)(y - 4) = 18 \implies y = \frac{4x + 10}{x - 2} \quad (3)$$

Despejando y de (3), se obtiene que

$$y = \frac{50}{x - 4} + 8$$

[2 pts]

reemplazando en (2), se tiene que el modelo funcional de este problema es:

$$A = A(x) = x \cdot \left(\frac{4x + 10}{x - 2} \right) \quad \text{con } x > 2$$

[3 pts]

y ahora, podemos obtener que:

$$\blacksquare A'(x) = -\frac{4(x^2 - 4x - 5)}{(x - 2)^2} = \frac{4(x + 1)(x - 5)}{(x - 2)^2} \quad [2 \text{ pts}]$$

$$\blacksquare \text{Valor crítico: } x = 5, \text{ no se considera } x = -1, \text{ pues } -1 < 2 \quad [1 \text{ pto}]$$

$$\blacksquare A''(x) = \frac{72}{(x - 2)^3} \implies A''(5) > 0 \text{ (Mínimo)}. \quad [2 \text{ pts}]$$

Paso 4: El área es mínima cuando: $x = 5$ e $y = 10$. Luego las dimensiones de la hoja son $x = 5$ cm e $y = 10$ cm. [1 pto]